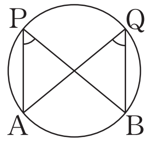
第 8 講　円の性質

PART1 円に内接する四角形

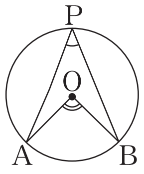
要点① 円に内接する四角形の性質

円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，
その弧に対する中心角の大きさの半分である。



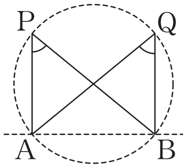
$\angle APB = \angle AQB$



$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

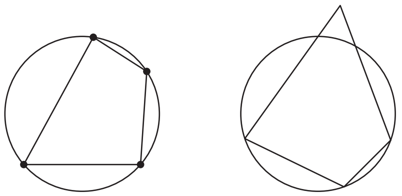
円周角の定理の逆

2点P, Qが直線ABに関して同じ側にあるとき，
$\angle APB = \angle AQB$ ならば，4点A，B，P，Qは
同一円周上にある。



四角形の4つの頂点が同一円周上にあるとき，
その四角形は円に「　　　　　　」という。

三角形は必ず円に内接するが，四角形は必ずしも円に内接するとは限らない。

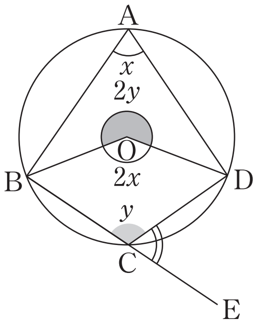


円に内接する四角形ABCDにおいて，$\angle BAD = x$，
$\angle BCD = y$ とおくと，円周角の定理により

弧BADに関する中心角は $2x$

弧BCDに関する中心角は $2y$

である。



$2x+2y=$　　　より $x+y=$　　　……①

つまり $\angle BAD + \angle BCD =$　　　である。

また $\angle ECD = 180^\circ - y$ であり，①より $180^\circ - y = x$ であるから，

$\angle ECD = x$　つまり $\angle ECD =$　　　　である。

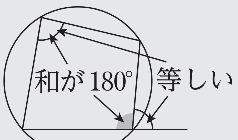
以上より，次のことが成り立つ。

円に内接する四角形の定理

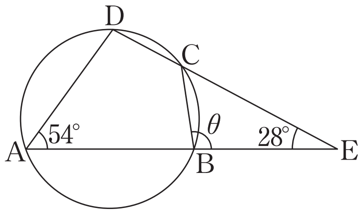
円に内接する四角形において

1　対角の和は 180° である。

2　内角は，その対角の外角に等しい。



例　右の図において，θ を求める。



$\angle \mathrm{BCD} = \qquad\qquad\qquad = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$

よって $\theta = \angle \mathrm{BCD} - \angle \mathrm{BEC} = 126^\circ - 28^\circ = 98^\circ$

（別解）

$\angle \mathrm{BCE} = \qquad\qquad = 54^\circ$

よって $\theta = 180^\circ - (\angle \mathrm{BCE} + \angle \mathrm{BEC}) = 180^\circ - (54^\circ + 28^\circ) = 98^\circ$

要点② 四角形が円に内接するための条件

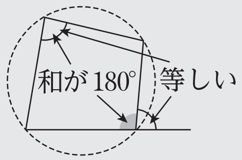
円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接するための条件

次の **1** または **2** が成り立つ四角形は，円に内接する。

1　1 組の対角の和が 180° である。

2　1 つの内角が，その対角の外角に等しい。

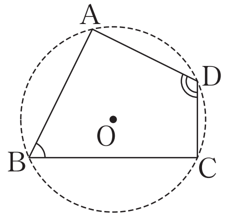


（**1** の証明）

四角形 ABCD において

$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ADC} = 180^\circ$　……①

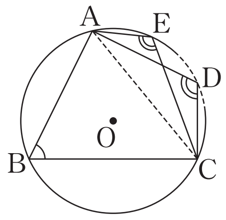
とする。



△ABC の外接円 O をかき，AC に関して B と反対側の円周上に点 E をとると，四角形 ABCE は円に内接する。

よって

$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{AEC} = 180^\circ$　……②



①，②より $\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{AEC}$

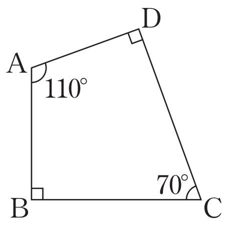
よって，円周角の定理の逆から，4 点 A，C，D，E は同一円周上にあり，その円は円 O である。

したがって，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあるから，四角形 ABCD は円に内接する。

例　右の四角形 ABCD において

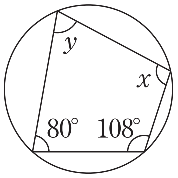
$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C} = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

よって，四角形 ABCD は円に内接する。

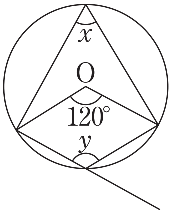


1 (1) 次の図において，x，y を求めよ。

(i)

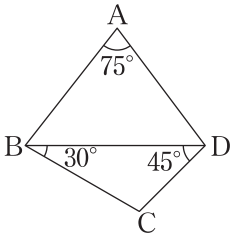


(ii)

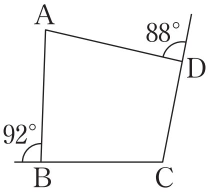


(2) 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを答えよ。

①



②



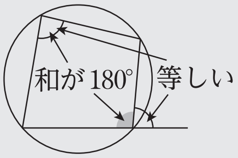
Point Pickup

円に内接する四角形

円に内接する四角形において

1　(対角の和) = 180°

2　(ある内角) = (その対角の外角)

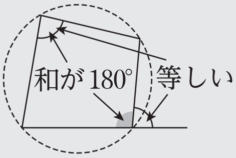


四角形が円に内接する条件

1　(1 組の対角の和) = 180°

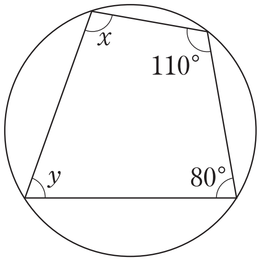
2　(ある内角) = (その対角の外角)

のいずれかが成立すれば，円に内接



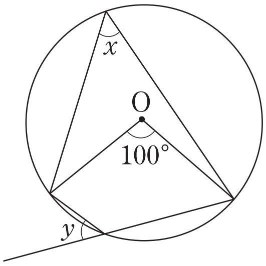
第 8 講　PART1 確認問題

1 次の図で，x，y を求めよ。



$x=$ アイウ °，$y=$ エオ °

2 次の図で，x，y を求めよ。

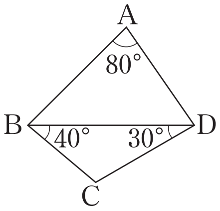


O は円の中心

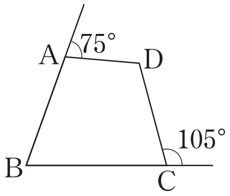
$x=$ カキ °，$y=$ クケ °

3 次の①，②の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ。 コ

①



②

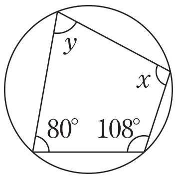


第 8 講　円の性質

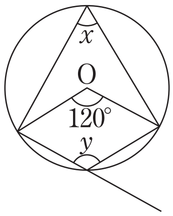
PART1　円に内接する四角形

1　(1)　次の図において，x，y を求めよ。

(i)

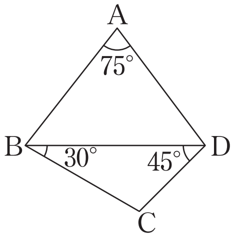


(ii)

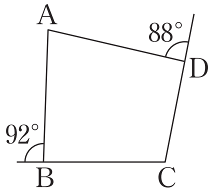


(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを答えよ。

①



②



[解答]

(1)(i)　$x=180°-80°=100°$，$y=180°-108°=72°$

(ii)　$x=120°\times\dfrac{1}{2}=60°$，$y=180°-x=180°-60°=120°$

(2)　①について

$\angle C=180°-(30°+45°)=105°$

よって，$\angle A+\angle C=75°+105°=180°$ より，四角形 ABCD は円に内接する。

②について

$\angle ABC=180°-92°=88°$

よって，$\angle ABC$ の大きさが頂点 D における外角の大きさと等しいので，

四角形 ABCD は円に内接する。

以上より，円に内接するのは①，②

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：100，エオ：70

[解説]

円に内接する四角形の対角の和は 180°であるから，

[A]

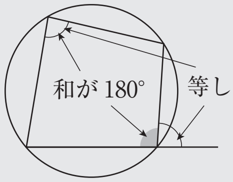
$$x+80^\circ=180^\circ$$

$$x=\mathbf{100^\circ}$$

$$y+110^\circ=180^\circ$$

$$y=\mathbf{70^\circ}$$

[A]　円に内接する四角形
① （対角の和）＝ 180°
② （ある内角）＝（その対角の外角）



2

[正解] カキ：50，クケ：50

[解説]

円周角と中心角の関係から，

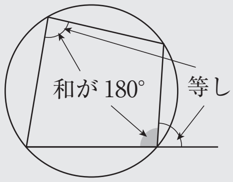
$$x=100^\circ\times\frac{1}{2}=\mathbf{50^\circ}$$ [B]

[B]　円周角は，中心角の $\frac{1}{2}$ となる。

円に内接する四角形の内角は，その対角の外角に等しいから， [C]

$$y=x=\mathbf{50^\circ}$$

[C]　円に内接する四角形
① （対角の和）＝ 180°
② （ある内角）＝（その対角の外角）



3 ［正解］コ：②

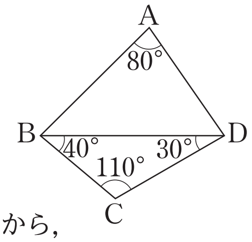
［解説］

① $\angle C = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ)$

$= 110^\circ$

$\angle A + \angle C = 80^\circ + 110^\circ$

$= 190^\circ$ ［D］

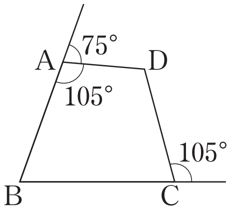


$\angle A + \angle C = 180^\circ$ でないから，

この四角形 ABCD は，円に内接しない。

② $\angle BAD = 180^\circ - 75^\circ$

$= 105^\circ$ ［E］



$\angle BAD$ の対角の外角が

105° であるから，［D］

この四角形 ABCD は，

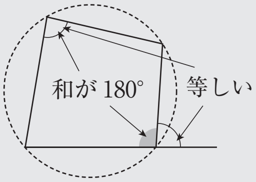
円に内接する。

［D］　四角形が円に内接する条件

（i）（1 組の対角の和）$= 180^\circ$

（ii）（ある内角）

$=$（その対角の外角）



［E］　四角形 ABCD の $\angle A$ の内角の大きさを調べる。